(VERY) EXPLICIT CONSTRUCTION OF RAMANUJAN COMPLEXES

A. Lubotzky, B. Samuels, U. Vishne

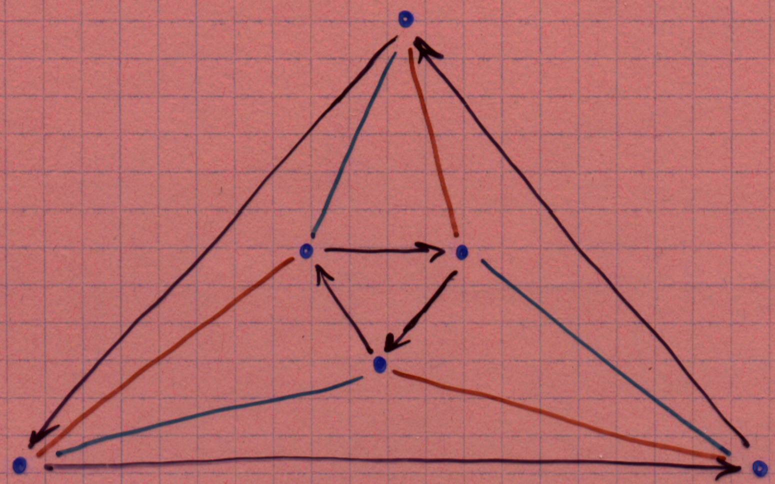
1) Explain "Explicit"

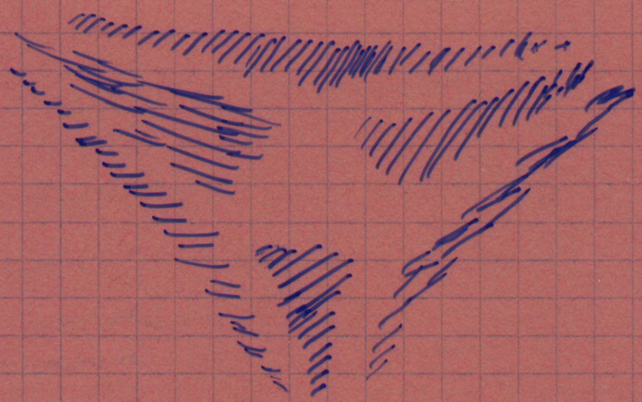
2) A group Γ (discovered by Cartwright-Steger) acting simply transitively on $B_d(F)$.

3) Finite quotients of Γ.

The Cayley complex of a group

$S_3 = \langle (12), (23), (123) \rangle$





An explicit Ramanujan complex

$\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x \mid x^4 = x + 1]$.

$$
\begin{aligned}
S \;=\; \Bigg\{ & \begin{pmatrix} x+x^3 & x^2 & x+x^2 \\ x & x^3 & 1+x+x^2 \\ x+x^2 & 1+x^2 & 1+x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+x+x^2+x^3 & x+x^2 & 1+x^2 \\ 1+x & x^2+x^3 & 1 \\ 1+x^2 & x & x^3 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1+x^2+x^3 & 1+x^2 & x \\ 1+x+x^2 & x+x^3 & x^2 \\ x & 1+x & x^2+x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+x^2+x^3 & x & 1+x \\ 1 & 1+x+x^2+x^3 & x+x^2 \\ 1+x & 1+x+x^2 & x+x^3 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1+x^3 & 1+x & 1+x+x^2 \\ x^2 & 1+x^2+x^3 & 1+x^2 \\ 1+x+x^2 & 1 & 1+x+x^2+x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3 & 1+x+x^2 & 1 \\ x+x^2 & x+x^2+x^3 & x \\ 1 & x^2 & 1+x^2+x^3 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} x^2+x^3 & 1 & x^2 \\ 1+x^2 & 1+x^3 & 1+x \\ x^2 & x+x^2 & x+x^2+x^3 \end{pmatrix} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_{16}) = \langle S \rangle$$

The Cayley complex is a Ramanujan complex.

The explicit construction of LPS graphs:

Fix $p \equiv 1 \pmod 4$

$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}ij \qquad i^2 = j^2 = -1 \ , \ jij^{-1} = -i$

$S = \{ a + bi + cj + dij \mid a^2+b^2+c^2+d^2 = p$
$\qquad a \text{ positive, odd} \}$

$\subset \mathbb{H}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])^* / \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]^* \subset PGL_2(\mathbb{Q}_p)$

The neighbors of $x_0 = \mathbb{Q}_p^2$ are
$\{ s \cdot \mathbb{Q}_p^2 \mid s \in S \}$ (since $\mathrm{Norm}(s) = p$)

$\Rightarrow \langle S \rangle$ acts transitively on $T_{q+1} = B_2(\mathbb{Q}_p)$.

Let $p = 2089346691901197 2 \ldots 53$.

Find S.

$F = \mathbb{F}_q((y))$

$\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[y]]$ the integers

$G = PGL_d(F)$

$K = PGL_d(\mathcal{O})$ max. compact s.g. of G

$B_d(F) = G/K$.

A discrete subgroup $\Gamma \subset G$ s.t.

Γ acts simply-transitively on $B_d(F)$	$\Gamma \cong G/K$	$\Gamma \cdot K = G$ $\Gamma \cap K = 1$

$k = \mathbb{F}_q(y)$

Valuations of k: v_y, v_{1+y}, $v_{1/y} = -\deg$

$(F = k_y)$

$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q) = \langle \phi \rangle$

$$A(S) = (S \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d})\left[z \,\middle|\, z\underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{F}_{q^d}}}{a}z^{-1} = \phi(a),\ z^d = 1+y\right]$$

If S is a field,
A(S) is a central simple algebra.

(If $S \otimes \mathbb{F}_{q^d}$ is a field,
A(S) is a cyclic algebra).

Wedderburn's criterion:

$\exp(A(S))$ (the order in $Br(S)$)

$=$ order of $1+y$ in $S^\times / \mathrm{Norms}(S \otimes \mathbb{F}_{q^d})$.

$v_y(1+y) = 0 \Rightarrow A(F) = M_d(F)$

$v_{1+y}(1+y) = 1 \Rightarrow A(k_{1+y})$ is a div. alg.

$v_{1/y}(1+y) = -1 \Rightarrow A(k_{1/y})$ is a div. alg.

Define $G'(S) = A(S)^\times / S^\times \subset GL_{d^2}(S)$.

* $G'(F) = PGL_d(F)$,
* $G'(k_{1+y})$, $G'(k_{1/y})$ are compact.

$R = \{a \in k \mid v(a) \geq 0 \text{ for all } v \neq v_{1/y}, v_y, v_{1+y}\}$

$= \mathbb{F}_q[y, \frac{1}{y}, \frac{1}{1+y}]$.

$$R \overset{\text{disc.}}{\subset} \overset{F}{\overset{\|}{k_y}} \times k_{1+y} \times k_{1/y} \Longrightarrow$$

$$G'(R) \overset{\text{disc.}}{\subset} G'(F) \times \underbrace{G'(k_{1+y}) \times G'(k_{1/y})}_{\text{compact}}$$

$\Rightarrow G'(R)$ discrete in $G'(F) = PGL_d(F)$.

$G = PGL_d(F)$ acts on $B_d(F) = G/K$;

$[\mathcal{O}^d] \leftrightarrow 1 \cdot K$;

$K =$ stabilizer of $\mathcal{O}^d$;

elements τ of G with integral entries satisfy $\tau \mathcal{O}^d \subseteq \mathcal{O}^d$.

Definition of Γ:

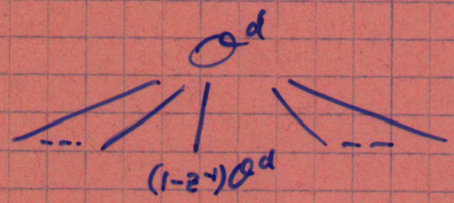
$1 - z^{-1} \in G'(R) \subset G'(F) = G$,

$(1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{O}^d \subset \mathcal{O}^d$

$$\mathrm{Norm}(1 - z^{-1}) = \frac{\mathrm{Norm}(z-1)}{\mathrm{Norm}(z)} = \frac{y}{1+y} \equiv \underline{\underline{y}} \pmod{\mathcal{O}^*}$$

$\Rightarrow [\mathcal{O}^d : (1 - z^{-1})\mathcal{O}^d] = q$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ The "color 1" neighbors of $[\mathcal{O}^d]$ are

$$\left\{ [u(1 - z^{-1})u^{-1} \cdot \mathcal{O}^d] \;\middle|\; u \in \mathbb{F}_{q^d}^{\times} / \mathbb{F}_q^{\times} = G'(\mathbb{F}_q) \subset G'(R) \right\}$$

$\Gamma = \langle u(1 - z^{-1})u \rangle \subset G'(R)$

$\Rightarrow$ Transitive action.

$\Gamma \cap K$ = discrete $\cap$ compact = finite.

$$\Gamma \cap K \subseteq G'(R) \cap G'(\mathcal{O})$$
$$= G'(R \cap \mathcal{O}) = G'(\mathbb{F}_q[y, \tfrac{1}{1+y}]).$$

$$A(\mathbb{F}_q[y, \tfrac{1}{1+y}]) = \mathbb{F}_{q^d}[y, \tfrac{1}{1+y}, z \,/\, z^d = 1+y]$$
$$= \mathbb{F}_{q^d}[z, z^{-1}] \qquad \text{(twisted polynomials)}$$

$$(\alpha_{i_0} \cdot z^{i_0} + \dots + \alpha_{i_1} \cdot z^{i_1})(\beta_{j_0} z^{j_0} + \dots + \beta_{j_1} \cdot z^{j_1})$$
$$= \gamma_0 \cdot z^{i_0+j_0} + \dots + \gamma_1 \cdot z^{i_1+j_1}$$

$\Rightarrow$ invertible elements of $A(\mathbb{F}_q[y, \frac{1}{1+y}])$ are monomials.

$$\Rightarrow G'(\mathbb{F}_q[y, \tfrac{1}{1+y}]) = \{u z^i\} / \langle z^d \rangle,$$

$$| \quad | = d \cdot \frac{q^d - 1}{q - 1}$$

$\Rightarrow \Gamma \cap K = 1$

$\Gamma \cong B_d(F)$.

$\Gamma \subseteq \mathrm{GL}_9(\mathbb{F}_2[1/t])$ has $7 = \dfrac{|\mathbb{F}_8^\times|}{|\mathbb{F}_2^\times|}$ generators:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&1&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

Defining relations:

$$21 = 53 = 64$$
$$06 = 25 = 31$$
$$30 = 42 = 61$$
$$10 = 36 = 54$$
$$02 = 43 = 56$$
$$05 = 14 = 62$$
$$15 = 23 = 40$$
$$021 = e$$

Finite quotients of Γ:

$G_1'(\,) =$ elements of norm 1 in $A(\,)^\times / \text{Center}^*$

$G_1'(\,)$ is semisimple simply-connected

$I \lhd R = \mathbb{F}_q[y, \frac{1}{y}, \frac{1}{1+y}]$ — prime

$(I = \langle p(y) \rangle \ , \ p \neq y, 1+y)$

$G_1'(R) \to G_1'(R/I)$ is onto

$$\Rightarrow \quad PSL_d(R/I) \subseteq \Gamma / \underbrace{\Gamma \cap G'(R,I)}_{= \Gamma(I)}$$
$$\cong \Gamma \cdot G'(R,I) / G'(R,I)$$
$$\subseteq G'(R) / G'(R,I) \cong PGL_d(R/I).$$

MAIN THM. $\Gamma / \Gamma(I)$ is a Ramanujan complex.

Variations: * $I = \langle p \rangle^s$

* Can control the index over $PSL_d(\,)$.

* Use ~~*~~ explicit splitting of $A(R/I)$ to embed $\Gamma/\Gamma(I)$ in $PGL_d(R/I)$.